— silného postihnutia rastlín s odumretými časťami bez výskytu lišajníkov.

Uvedený model spoľahlivo zobrazuje pôsobenie ovzdušia na živé rastlinné organizmy. Ďalším užitočným modelom je model hydrogeologických pomerov regiónu, do ktorých sú zobrazené zdroje znečistenia vody alebo model negatívnych limitujúcich krajinných faktorov, modely koncentrácií rôznych odpadových chemikálií vo vode, v ovzduší a v pôde. Súhrnné informácie poskytuje model ekologického zónovania krajiny s návrhmi nápravných prírodných, technických, spoločenských a technologických opatrení. Pri použití disketovej pamäťovej jednotky, pre doplňujúce tematické informačné súbory, je vytváranie analytických, nápravných i simulačných používateľských modelov na báze topografického modelu neohraničené.

5. Aktualizácia modelových informačných súborov

Modelové údaje pre topografické informačné súbory sme získali digitalizáciou z aktualizovaných podkladov pre mapu okresu Michalovce v mierke 1:50 000. Tieto podklady sa aktualizujú v zmysle inštrukcie na tvorbu, obnovu a vydávanie Základnej mapy ČSSR v mierke 1:50 000 [7].

Tematické modelové údaje sme doplňovali z rozličných rezortných podkladov, z máp rôznych mierok, vyžadujúcich špeciálnu prípravu a spracovanie. Časť podkladov bola v textovej forme. Na skúmanie vývoja ekologických zmien a jeho vyjadrenie kartografickými prostriedkami účinnými metódami zberu vstupných údajov sú fotogrametrické metódy a diaľkový prieskum Zeme. Niektoré možnosti aktualizačnej interpretácie v informačnom súbore vodstva a komunikácií sme odskúšali. Zo spektrozonálnych kozmických snímok v mierke cca 1:270 000 boli vytvorené tri zväčšeniny v mierke 1:50 000 na papier, na tých bolo zvolených 20 vlícovacích bodov (hlavne zo súboru riek). Takto získané interpretačné schémy boli ďalej digitalizované a transformované, skontrolované súradnice bodov doplnili alebo aktualizovali informačné súbory vodstva a komunikácií.

6. Záver

Kartografické modelovanie využívajúce databázové a grafické prostriedky počítačov posilňuje poznávaciu, a tým aj informačnú stránku máp a kartografických modelov, napomáha ich aktualizácii a používaniu. V územnom rozsahu regiónu (napr. okresu alebo oblasti) možno tieto poznatky pomocou PC využiť na vytvorenie digitálnych, uživateľských modelov pre potreby informačného zabezpečenia správnych a rozhodovacích orgánov.

LITERATÚRA:

[1] DEMEK, J.: Mapy životného prostredia. [Scripta Sac. Sci. mat. UJEP Brunensis, Geographia 1 č. 9] Brno 1970. 121 s.
[2] HÁJEK, M. a i.: Štruktúra kartografického modelu prírodnej a socioekonomickej sféry Východoslovenskej nížiny. [Výskumná správa.] Bratislava, Stavebná fakulta SVŠT 1988. s. 1—37.
[3] KVITKOVIČ, J. a i.: Geosystémy a ich racionálne využívanie pri ochrane a tvorbe životného prostredia. [Výskumná správa.] Bratislava, GÚ SAV 1985. s. 177.
[4] MINIBERG, B.—ŠIMEK, M.: Automatizovaná podpora konceptuální analýzy na personálním počítači. Mechanizace a automatizace administrativy, 1990, č. 1, s. 23—26.
[5] MITÁŠOVÁ, I.—VEVERKA, B.—PEZLAR, Z.: Základy teórie systémov a kybernetiky s aplikáciami v geodézii a kartografii. Bratislava, Alfa-SNTL 1990. s. 240.
[6] MORAVEC, D.: Modelovanie automatizované tvorby topografických máp. Studia geografica, 1986, s. 116.
[7] Inštrukcia na tvorbu, obnovu a vydávanie Základnej mapy ČSSR 1:50 000. Bratislava, SÚGK 1984. s. 11.
[8] Inštrukcia na tvorbu, obnovu a vydávanie mapy okresov SSR 1:50 000. Bratislava, SÚGK 1988. s. 9.

Do redakcie došlo: 7. 5. 1990

Lektoroval:
Doc. Ing. Bohuslav Veverka, CSc.,
Katedra mapování a kartografie
FSv ČVUT, Praha

Kartografické modelovanie plôch a telies splajnami s tenziou

Ing. Helena Mitášová, CSc.,
Jaroslav Hofierka, Marián Zlocha,
Prírodovedecká fakulta UK v Bratislave

528.932.7

Venované 9. kartografickej konferencii, Prešov 25.—27. 10. 1990

1. Úvod

V geovedách se často stretávame s problémom modelovania javov pomocou spojitých funkcií, ktorých hodnoty poznáme len v niekoľkých diskrétnych bodoch. Problém interpolácie možno formulovať všeobecne pre d-dimenzionálny prípad takto: Majme n hodnôt skúmaného javu $z^{(j)}$; $j = 1, \ldots, n$, meraných v diskrétnych bodoch $\boldsymbol{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_d^{(j)})$ v určitej oblasti d-dimenzionálneho priestoru. Zostrojme funkciu $S(\boldsymbol{x})$ takú, že

$$S(\boldsymbol{x}^{(j)}) = z^{(j)}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

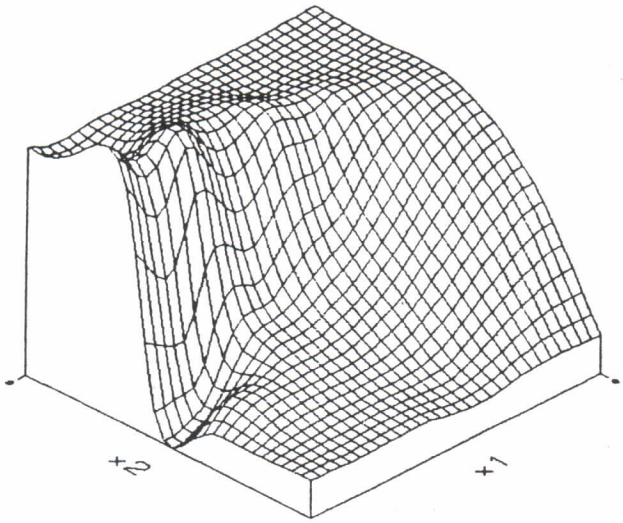
Je zjavné, že funkcií spĺňajúcich podmienku (1) možno najsť nekonečne veľa. Aby sme dostali jednoznačné riešenie, je potrebné zaviesť pre funkciu $S(\boldsymbol{x})$ dodatočné podmienky.

2. Variačný prístup k interpolačnému problému

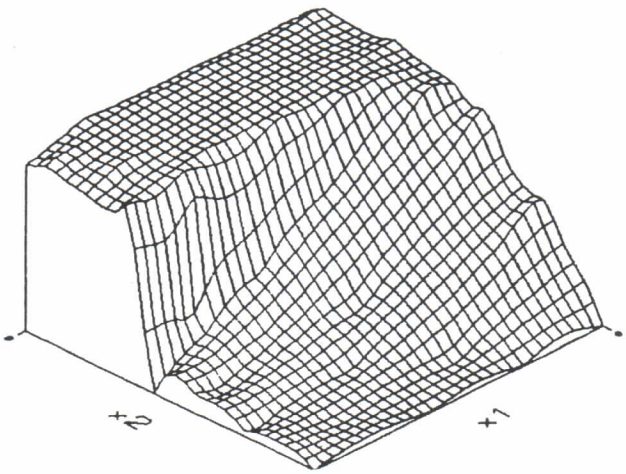
Mnoho interpolačných metód je založených na predpoklade, že interpolačná funkcia má byť hladká. Ako mieru hladkosti funkcie $g(\boldsymbol{x})$ d reálnych premenných $/\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)/$ v oblasti Ω d-dimenzionálneho priestoru zavedieme seminormu $E(g)$ navrhnutú v práci [7] v tvare

$$E^2(g) = \sum_{\alpha} B_\alpha \int \ldots \int_\Omega \left| \frac{\partial |\alpha|}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} g(\boldsymbol{x}) \right|^2 . \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_d, \tag{2}$$

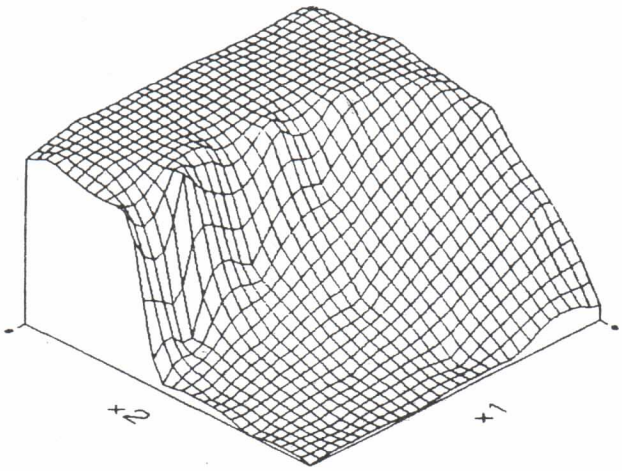
kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ je multiindex, ktorého dĺžka je $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ a $\{B_\alpha\}$ sú nezáporné konštanty. Pomocou (2) možno variačné riešenie interpolačného problému for-



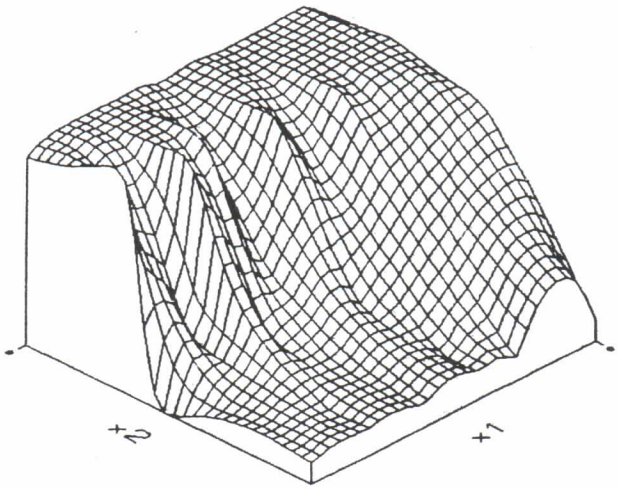
Obr. 1 Splajn tenkej platne



Obr. 3 Zvýšená tenzia orientovaná v smere osi x_1



Obr. 2 Kompletne regularizovaný splajn



Obr. 4 Zvýšená tenzia orientovaná v smere osi x_2

mulovať takto: Nájdi funkciu $S(\boldsymbol{x})$, ktorá spĺňa podmienky

$$S(\boldsymbol{x}^{(j)}) = z^{(j)}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$E^2(S) = \text{minimum}. \tag{4}$$

Talmi a Gilat v práci [7] ukázali, že problém má jediné riešenie

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{m} a_l f_l(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(j)}), \tag{5}$$

kde $\{f_l(\boldsymbol{x})\}$ je množina lineárne nezávislých funkcií, ktoré majú nulovú seminormu hladkosti (2), $R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(j)})$ je generujúca funkcia a a_l, λ_j sú koeficienty, ktoré sa vypočítajú riešením nasledujúcej sústavy lineárnych rovníc

$$S(\boldsymbol{x}^{(j)}) = z^{(j)}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_l(\boldsymbol{x}^{(j)}) = 0, \qquad l = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

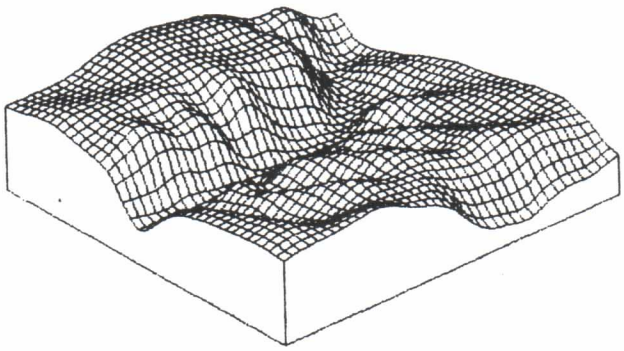
Všeobecný matematický postup pre konštrukciu generujúcich funkcií sa uvádza v práci [8] a niektoré nové funkcie sme prezentovali v prácach [3], [5].

3. Kompletne regularizovaný splajn

Najznámejšou a v praxi úspešne overenou funkciou, vychádzajúcou z variačného prístupu, je *splajn tenkej platne.* Pri aplikácii tejto funkcie však vznikajú problémy jednak pri interpolácii v oblastiach s prudko sa meniacim gradientom (vznik falošných extrémov) a pri výpočte derivácií druhého rádu (logaritmické singularity) [4], [5].

Tieto obmedzenia sme sa snažili zmierniť nájdením novej, všeobecnejšej interpolačnej funkcie. Jej seminorma hladkosti zahŕňa derivácie *všetkých rádov* a má všeobecný tvar daný vzťahom (2), kde príslušné koeficienty sú

$$B_\alpha = \begin{cases} 0, & |\alpha| = 0 \\ \dfrac{C(\alpha)}{\varphi_{2|\alpha|}(|\alpha| - 1)!}, & |\alpha| \neq 0 \end{cases}, \tag{8}$$



Obr. 5 Pohľad

kde

$$C(\alpha) = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \ldots \alpha_d!} \tag{9}$$

pričom $\alpha_1, \ldots \alpha_d = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Zodpovedajúci explicitný tvar interpolačnej funkcie, ktorú sme nazvali *kompletne regularizovaný splajn*, je daný pre $d = 2$

$$S(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left\{ \ln\left(\frac{\varphi r_j}{2}\right) + \mathrm{E}_1 \left[\left(\frac{\varphi r_j}{2}\right)^2\right] + C_E \right\} \tag{10}$$

a pre $d = 3$

$$S(\boldsymbol{x}) = a_1 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\frac{2}{\varphi r_j} \operatorname{erf}\left(\frac{\varphi r_j}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right], \tag{11}$$

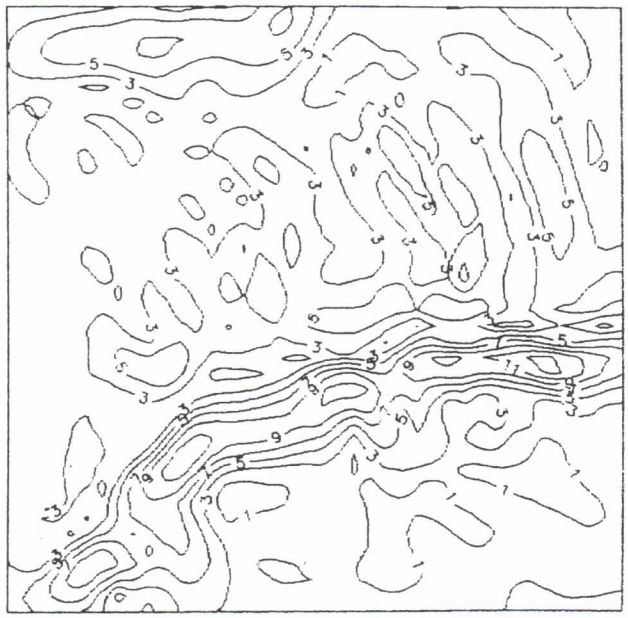
kde

$$r_j^2 = \sum_{k=1}^{d} (x_k - x_k^{(j)})^2. \tag{12}$$

V týchto vzťahoch C_E je Eulerova konštanta a E_1 (.) a erf (.) sú špeciálne funkcie, pre ktoré sú príslušné polynomické aproximácie, vhodné pre počítačovú implementáciu, uvedené v zodpovedajúcej matematickej literatúre (napr. [1]). Voliteľný parameter φ možno chápať ako zovšeobecnený parameter tenzie, ktorý umožňuje meniť charakter interpolačnej plochy od tenkej pružnej platne po membránu. Funkcia má regulárne derivácie všetkých rádov, je rotačne invariantná, pričom zmena mierky je ekvivalentná zmene parametra zovšeobecnenej tenzie. Posledné dve vlastnosti možno využiť na zavedenie jednoduchého typu anizotropie tak, že preškálovaním priestoru v danom smere sa v tomto smere adekvátne zmení tenzia.

4. Analýza, spádnice a špecifické línie

Explicitný tvar interpolačných funkcií umožňuje pomerne rýchlo a jednoducho generovať štvorcovú sieť s ľubovoľnou hustotou, k vrcholom ktorej sú vypočítané nielen funkčné hodnoty, ale i hodnoty derivácií alebo z nich odvodených parametrov (sklonov, orientácií, spádnicových, horizontálnych prípadne hlavných krivostí). Na báze štvorcovej siete sa potom realizujú izočiarové mapy a pohľady, reprezentujúce modelovaný jav i mapy priestorového rozloženia jeho morfometrických parametrov, vyhľadáva sa priebeh spádnic postupom v smere vektora gradientu a rozpracovaný je aj postup na vyhľadávanie chrbátnic a údolníc ako lokálnych extrémov horizontálnych krivostí, ako sa podrobnejšie uvádza v práci [2].



Obr. 6 Sklony

5. Výsledky

Kompletne regulovaný splajn bol použitý v programovom systéme na modelovanie a analýzu priestorových javov z 2- a 3- dimenzionálnych diskrétnych údajov, ktorého koncepciu uvádzame napr. v [4], [5]. Možnosti systému ilustrujeme na nasledovných príkladoch.

5.1 Interpolácia plochy so zlomom

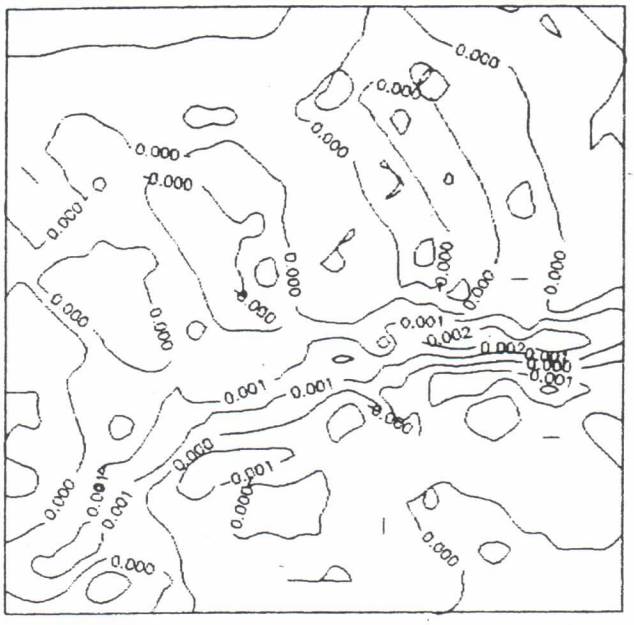
Vplyv orientovanej tenzie interpolačnej plochy ilustrujeme na funkcii so zlomom, ktorej nepravidelné vstupné bodové pole je prevzaté z práce [6]. Aplikácia splajnu tenkej platne viedla podobne ako iné štandardne používané metódy k ploche so silne zvlneným priebehom v oblasti zlomu (obr. 1). Zvlnenie sa podstatne znížilo pri použití kompletne regularizovaného splajnu (obr. 2) s dostatočne vysokou hodnotou parametra tenzie ($\varphi = 45$) a najmä pri zavedení zvýšenej tenzie orientovanej v smere osi x_1 ($\varphi = 110$, pomer škálovania 1 : 3, obr. 3). Zvýšenie tenzie v smere kolmom na zlom viedlo k vzniku zaujímavého efektu zrejmého z obr. 4.

5.2 Interpolácia a morfometrická analýza reliéfu

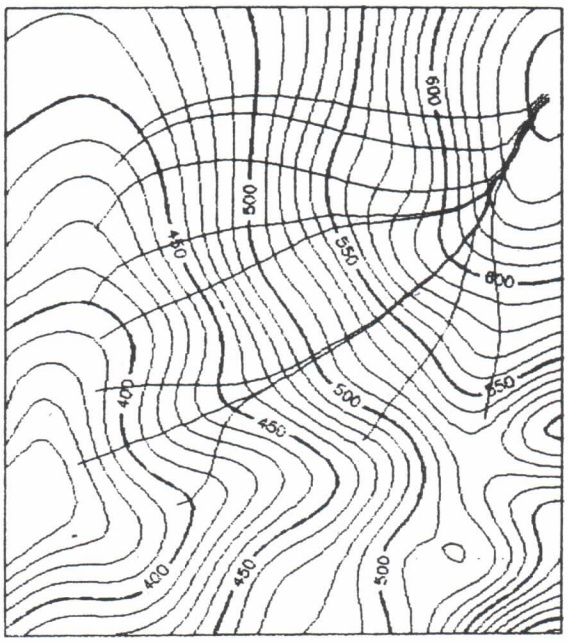
Vstupné bodové pole (155) bodov bolo digitalizované z vrstevníc ZM ČSFR 1 : 10 000. Z tohoto vstupného bodového poľa boli vypočítané hodnoty nadmorských výšok, sklonov, spádnicových a horizontálnych krivostí k vrcholom štvorcovej siete 40 × 39 kompletne regularizovaným splajnom ($\varphi = 20$). Pohľad na reliéf a analytické izočiarové mapy sú na obr. 5. — pohľad, obr. 6. — sklony, obr. 7. — spádnicová krivosť, obr. 8. — horizontálna krivosť. Priebeh vybraných spádnic je na obr. 9. a údolníc a chrbátnic na obr. 10.

5.3 Interpolácia z 3-*d* údajov z geologických vrtov

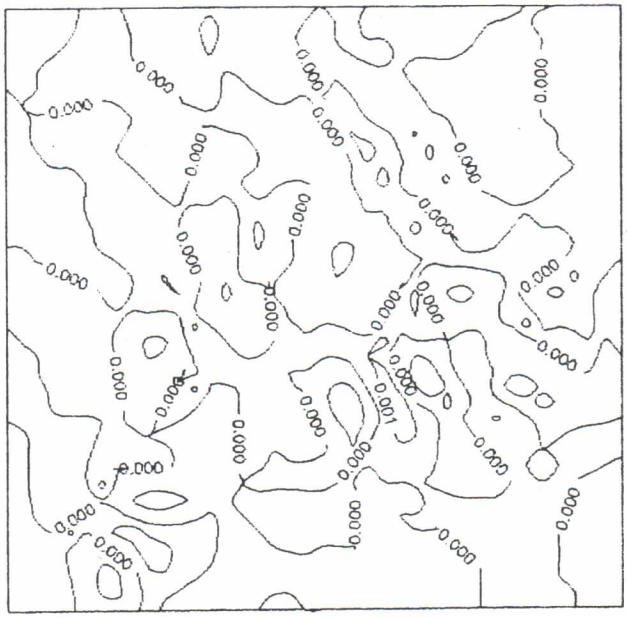
Vstupné bodové pole tvorí 1185 bodov $(x_1, x_2, x_3)^{(j)}$ s nameranými hodnotami koncentrácií $z^{(j)}$. Vzhľadom na veľkosť a rozloženie bodov vstupného bodového poľa bolo použité segmentované spracovanie po prekrývajúcich sa vrstvách ako sa podrobnejšie uvádza v práci [8].



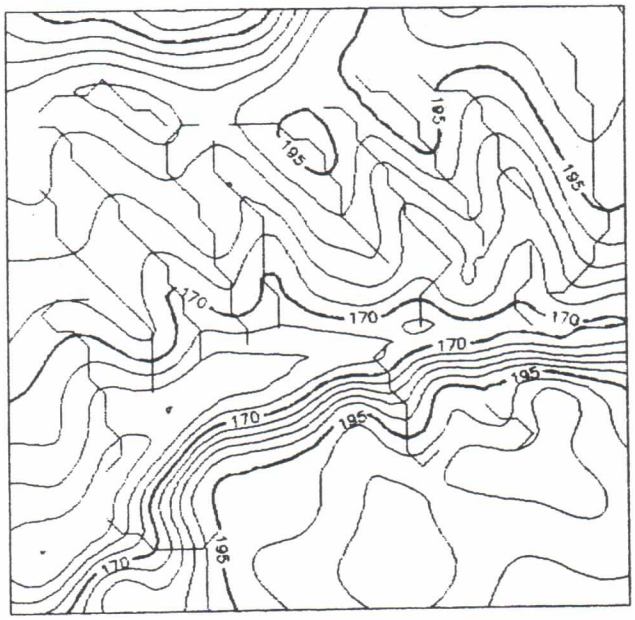
Obr. 7 Spádnicová krivosť



Obr. 9. Vybrané spádnice



Obr. 8 Horizontálna krivosť

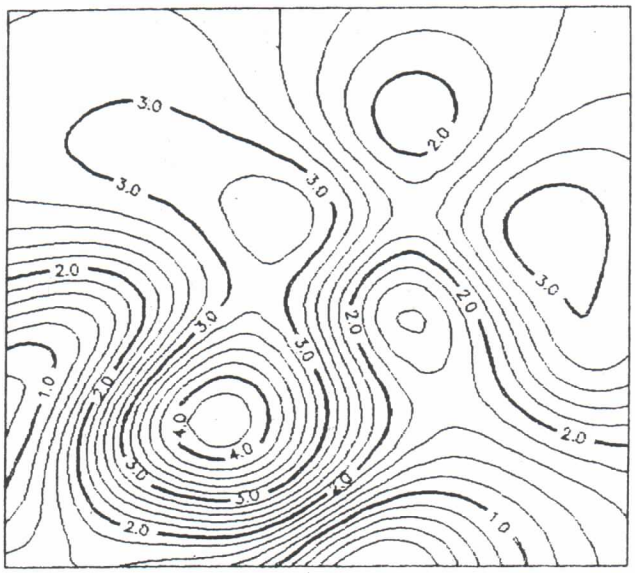


Obr. 10 Chrbátnice a údolnice

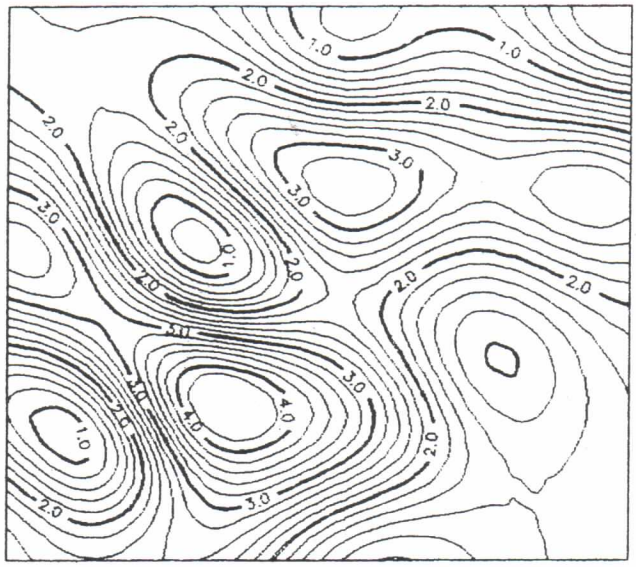
Na základe interpolačnej funkcie troch premenných bolo vypočítané priestorové rozloženie koncentrácií v ložisku s možnosťou kartografického znázornenia ľubovoľného rezu ložiskom v tvare izočiarovej mapy. Na obr. 11-14 sú vybrané horizontálne a vertikálne rezy modelovaným ložiskom.

6. Závery

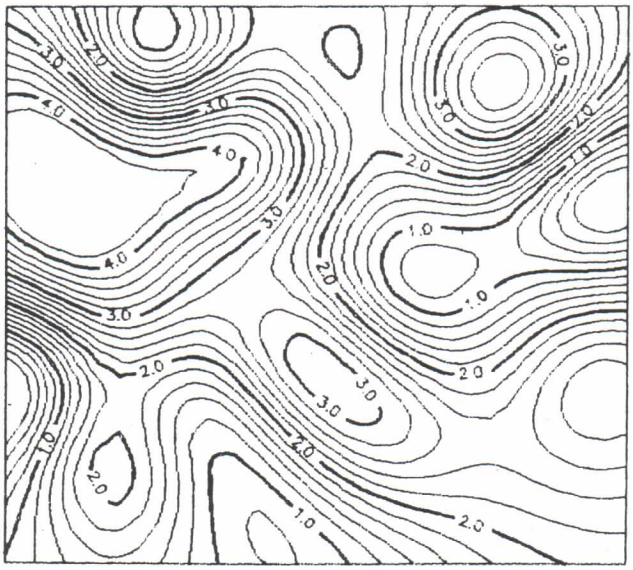
V práci sme prezentovali výsledky dosiahnuté v oblasti interpolácie a analýzy spojitých funkcií dvoch a troch premenných, ktoré patria k základným nástrojom modelovania v geovedách. Navrhli sme novú interpolačnú funkciu *kompletne regularizovaný splajn* s riaditeľnou orientovanou tenziou a regulárnymi deriváciami všetkých rádov. Overili sme vlastnosti prezentovaných metód na viacerých praktických príkladoch, ktoré potvrdili vysokú presnosť interpolácie (testy v práci [6]) a ukázali možnosti čiastočne prispôsobiť charakter funkcie modelovanému javu. Významným prínosom je možnosť efektívneho spracovania analytických máp modelovaného javu, predovšetkým máp krivostí a poľa spádnic a modelovanie javov funkciami troch premenných.



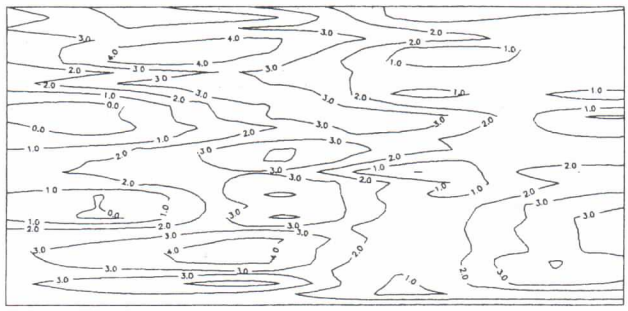
Obr. 11 Horizontálny rez geologickým ložiskom (300 m. n. m.)



Obr. 12 Horizontálny rez geologickým ložiskom (340 m. n. m.)



Obr. 13 Horizontálny rez geologickým ložiskom (400 m. n. m.)



Obr. 14 Vertikálny rez geologickým ložiskom (xz rez)

LITERATÚRA:

[1] ABRAMOWITZ, M. — STEGUN I. A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York 1964.

[2] HOFIERKA, J.: Význam morfometrických parametrov a špecifických línií georeliéfu a ich vyhľadávanie z diskrétnych dát. [Práca ŠVOČ.] Bratislava 1990 - PF UK.

[3] MITÁŠ, L. — MITÁŠOVÁ, H.: General variational approach to the interpolation problem. Computers and Mathematics with Applications, 16, 1988, s. 983—992.

[4] MITÁŠOVÁ, H.: Kartografické aspekty počítačového modelovania povrchov. [Kand. diz. práca.] Bratislava 1985 - SvF SVŠT.

[5] MITÁŠOVÁ, H.: Interpolácia a analýza povrchov z diskrétnych bodových polí splajn funkciami so zovšeob. tenziou. [Záv. výsk. správa.] Bratislava 1989 - PF UK.

[6] NIELSON, G. — Franke, R.: A method for construction of surfaces under tension. Rocky Mountain J. Math., 14, 1984, s. 203—221.

[7] TALMI, A. — GILAT, G.: Method for Smooth Approximation of Data. J. Comp. Physics 23, 1977, s. 93—123.

[8] ZLOCHA, M: Modelovanie 3-d geologických povrchov metódami globálnych bázových funkcií. [Diplomová práca.] Bratislava 1990 - PF UK,.

Do redakcie došlo: 4. 6. 1990

Lektoroval:
Doc. RNDr. Radko Mesiar, CSc.,
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie SvF SVŠT v Bratislave

LITERATÚRA (k čl. Mičietová):

[1] BARTELME, N.: GIS Technologie. Geoinformationssysteme, Landinformationssysteme und ihre Grundlagen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989, s. 98—115.

[2] KRCHO, J.—MIČIETOVÁ, E.: Geoinformačný systém o geografickej sfére a komplexný digitálny model priestorovej štruktúry ako jeho integrálna súčasť. Geografický časopis SAV, 41, 1989 č. 3, s. 249—273.

[3] KRCHO, J.—MIČIETOVÁ, E.: Geografický informačný systém — štruktúra a úrovne integrity. Geografický časopis SAV, 41, 1989, č. 4, s. 369—387.

[4] SAUER, H.: Rasterorientierte Informationssysteme in der Geographie. Würzburger Geographishe Arbeiten. Heft 74. Würzburg 1989, s. 237.

[5] TOMLINSON, R. F.: The Development of Geographic Information Systems: Past, Present and Future. Land and Water Management. Department of Geography University of Albena, Edmonton, Albena 1988.

Do redakcie došlo: 14. 5. 1990

Lektoroval:
Doc. Ing. Irena Mitášová, CSc.,
Katedra geodetických základov,
SvF SVŠT v Bratislave